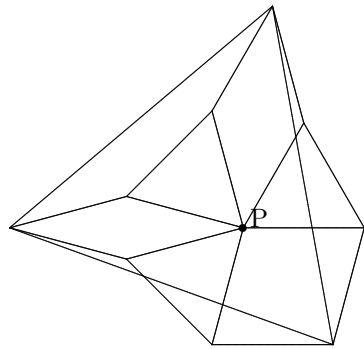


## 正三角形になる話

そもそもの発端は、Internet で面白そうな初等幾何の問題を探していたときに見かけた、次のような図でした。



確か、台湾の大学の教育学部系のHomePage だったと思います。いくつもある他のページには、中国語で問題らしきものが書いてありましたが、この図には何も記載が無く、ただ並んでいるだけでした。

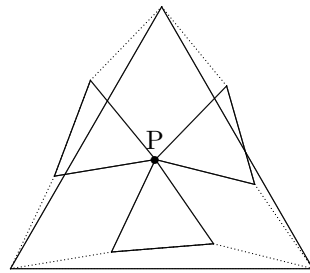
面白そうな図なのだけど、何が問題なのかわからずそのまま放置していましたが、少し時間ができたので考えてみることにしました。

∞

そこで最初に設定した問題は、

問題

正三角形と点 P が与えられたとき、次の図のような点 P を頂点とする 3 つの合同な正三角形を作図しなさい。つまり、点 P と元の正三角形の頂点を対角とする菱形を三つ作り、その菱形の辺が図のように互いに正三角形を作るようにしなさい。

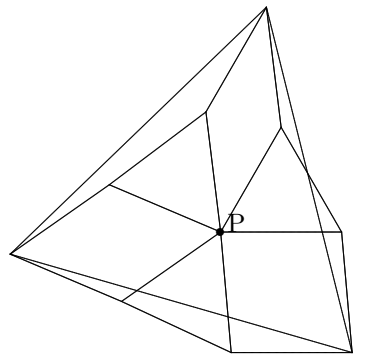


という作図の問題でした。

ところが、いざ解きだすと色々判らない事が増えてきたので、一旦、次の逆の問題を考えることにしました。

逆の問題

ある点 P と、点 P を頂点とする 3 つの合同な正三角形があるとき、点 P と隣り合う正三角形の辺が作る菱形の頂点が、図のように正三角形を作る事を説明しなさい。



初等幾何の手法による説明にしばらく執着したのですが、手に負えず挫折

して、複素平面でのベクトル計算で取敢えず解決しました。

それでは、複素数を用いた証明を見てみましょう。

∞

簡単の為に、3 つの正三角形の共有する頂点 P を原点とします。更に正三角形の一辺の長さは 1 とし、一つの正三角形の原点以外の頂点を  $1 \omega$  とします。

つまり、 $\omega$  は 1 を  $60^\circ$  回転させた複素数、 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$  とします。残りの二つの正三角形の原点以外の頂点は  $\alpha, \omega\alpha, \beta, \omega\beta$  とします。ここで、 $\alpha, \beta$  は任意の複素数としましょう。0, 1,  $\omega$  の正三角形を  $\alpha, \beta$  倍させることで設定しています。念のため、複素平面での複素数の乗算は、原点を中心とした回転とスカラー倍を表します。また、 $|\alpha| = |\beta| = 1$  という条件については後ほど...

このとき、問題の三角形の頂点は、それぞれ、

$$\omega + \alpha, \omega\alpha + \beta, \omega\beta + 1$$

となります。したがって、例えば、 $\omega\alpha + \beta - (\omega + \alpha)$  に  $\omega$  をかけて  $\omega\beta + 1 - (\omega + \alpha)$  になれば、証明が完了します。

ここで、 $\omega$  は  $60^\circ$  の回転を表す複素数ですから、

$$\omega^3 = -1 \quad \text{より、} \quad \omega^3 + 1 = 0 \iff (\omega + 1)(\omega^2 - \omega + 1) = 0.$$

$$\text{したがって、} \quad \omega^2 = \omega - 1$$

に注意しましょう。

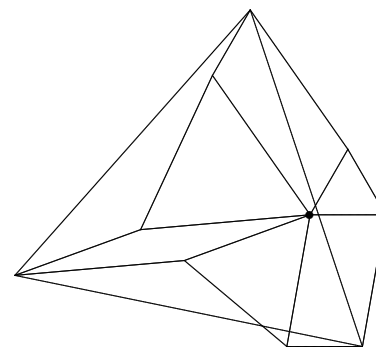
$$\begin{aligned} \{\omega\alpha + \beta - (\omega + \alpha)\}\omega &= \omega^2\alpha + \omega\beta - \omega^2 - \omega\alpha \\ &= (\omega - 1)\alpha + \omega\beta - (\omega - 1) - \omega\alpha \\ &= \omega\alpha - \alpha + \omega\beta - \omega + 1 - \omega\alpha \\ &= \omega\beta + 1 - (\omega + \alpha) \end{aligned}$$

以上で証明は終わりです。

∞

計算からも判るとおり、この問題の三つの正三角形が同じ大きさである、という条件が本質的でないことに気が付くでしょう。ただし大きさが異なる場合は、菱形ではなく、平行四辺形の頂点で考えることとなります。(計算では、 $|\alpha| = |\beta| = 1$  という条件は不要だということです。)

したがって、たとえば、右の図のようなことが成り立つわけです。



更に、計算式や、上の正三角形の大きさを変えた場合の図を見てみると気が付くことがあります。それは、上の証明での式の各項が、図の正三角形や平行四辺形の辺に対応していて、それらを  $60^\circ$  回転させた辺もまた、別の正三角形や平行四辺形の辺に対応しているということです。

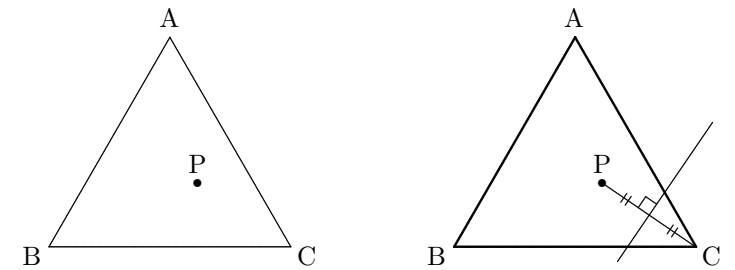
このことに気が付けば、初等幾何での証明もなんでもありません。簡単にはずすね。

∞

さて、では最初の問題です。まじめに取り組んでみました。

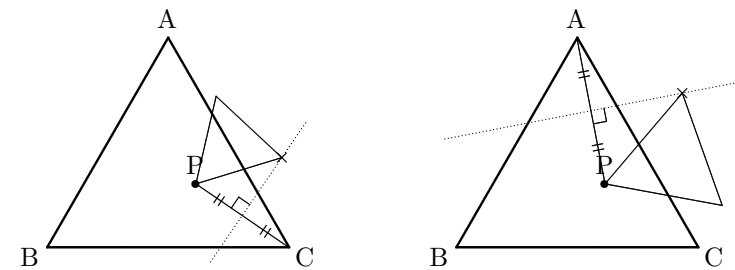
まず、条件を満たすような正三角形(の頂点)を一つでも描くことができれば、残りの正三角形(の頂点)は簡単に求めることができます。

そこで、例えば点 P と頂点 A, C の間にできる正三角形を特定してみることにしました。



求める正三角形の頂点はどのように絞り込めるでしょうか。頂点は PC を対角線とする菱形の頂点ですから、右の図のような線分 PC の垂直二等分線上にあるはずです。

更に同じ事がもう一つの頂点についても言えます。



したがって、この二つの条件を満たす点、つまり、点 P と線分 PC, PA の垂直二等分線上の 2 点が正三角形を成すような 2 点の取り方が残された問題となりました。

∞

実はここで、数日間もやもやと考えたり、知人に問い合わせたりと、試行錯誤を繰り返して悩んでいました。勿論始終この問題ばかり考えていたわけではないので、悩むというほど大袈裟ではなかったかもしれませんが。ただし、何やら喉の痞えが取れないような日々が続いたのは確かです。

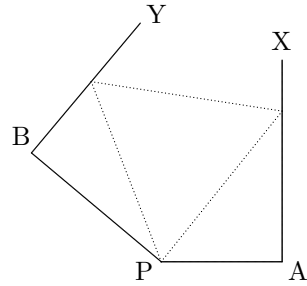
∞

結局は、次の作図題が解ければ解決するわけです。

正三角形の作図問題

$\angle PAX = \angle PBY = 90^\circ$  であるような線分列 XAPBY に対して、直線 AX, BY 上に点 Q, R をとり、3 点 P, Q, R が正三角形の頂点をなすようにしなさい。

ただし、点 X, Y は線分 AB に対して同じ側にあるものとする。



この問題の  $\angle PAX = \angle PBY = 90^\circ$  という条件は作図問題としては本質的ではありません。直角限定でなくても、作図できることが望ましいわけですが、ここでは本題から外れるので、放っておきます。

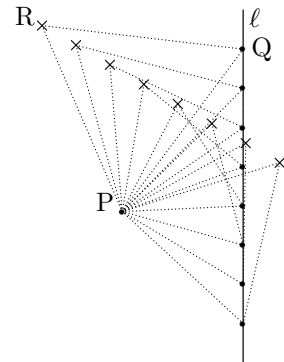
さて、どうすれば、図のような正三角形が描けるのでしょうか。作図問題ですから、座標計算は御法度です。とはいえ、解決への糸口やヒントは得られるかもしれません。

∞

実際 (仮称) 十進 BASIC というベーシック言語で苦し紛れに作図の実験をしてみても次のことに気が付き (思い当たり!?) ました。

正三角形の頂点の軌跡

定点 P と P を通らない定直線  $\ell$  上の点 Q を頂点とする正三角形 PQR のもう一つの頂点 R の軌跡は直線である。

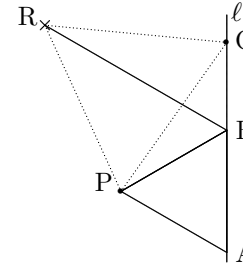


これを認めて、頂点 R の軌跡は具体的にはどのような直線か、が判れば、問題の正三角形を描く事は容易であり、当初の問題も解決するというわけです。

それでは、まず R の軌跡が直線になることを説明してみましょう。

∞

簡単のために、点 R は定点 P から Q の方向に対して左側にとるものとします。また、次の図のように、定直線  $\ell$  上に 2 点 A, B を、定点 P からみて A が右側にあり  $\triangle PAB$  が正三角形となるようにします。このとき、点 Q の位置に依らずに、常に  $\angle RBP = 60^\circ$  となることを示します。



このことは、四辺形 PBQR が円に内接することを示せば、円周角の定理から明らかです。

ここで、 $\triangle PBQ$  より、

$$\angle PQB + \angle QPB = \angle PBA = 60^\circ$$

したがって、

$$\angle RPB + \angle BQR = 60^\circ \times 3 = 180^\circ$$

となり、四辺形 PBQR が円に内接します。よって、円周角の定理より、

$$\angle RBP = \angle RQP = 60^\circ$$

です。点 B は定点 P と定直線  $\ell$  により定点ですから、点 R は Q の位置に依らず、B を通り線分 PA に平行な直線上にあることがわかります。

つまり、条件を満たす点 R の軌跡が直線であることが判りました。

∞

そして、そのついでに、その直線が具体的にどこを通るかも判ったわけです。それではこの R の軌跡である直線の作図方法を考えてみましょう。

演習問題

定点 P と P を通らない定直線  $\ell$  が与えられたとき、定直線上に 2 点 A, B をとり、3 点 PAB が正三角形をなすように点 A, B を作図しなさい。注意 作図問題なので、直定規とコンパスのみ使用可とします。また、定規の目盛を使うことは厳禁です。定規はあくまで直線を描く為にだけ用います。

それでは、準備が整ったところで、最初の問題に戻りましょう。問題は「正三角形と点 P が与えられたとき、点 P を頂点とする 3 つの合同な正三角形を作図しなさい。ただし、隣合う正三角形の辺が作る菱形の頂点に元の正三角形の頂点が含まれるようにしなさい。」について考えてみましょう。

ここまでの議論から、作図の過程が一つ一つ迎えます。その結果、一応一通りの 3 つの正三角形の組が決まることになります。

(つづく)